УДК 517.9

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В ДВУМЕРНОМ ПАРАБОЛИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ПРИ СТРЕМЛЕНИИ ВРЕМЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ К БЕСКОНЕЧНОСТИ

Кригер Е.Н.
научные руководители канд. физ.-мат. наук Фроленков И.В., д-р физ.-мат. наук Белов Ю.Я.
Сибирский федеральный университет

В работе рассмотрена задача идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении в случае данных Коши. Коэффициент при функции источника представим в виде суммы двух функций, каждая из которых зависит от временной и одной пространственной переменных. Условия переопределения заданы на двух пересекающихся плоскостях. Исследовано поведение решения задачи при $t \to +\infty$. Исследование проводится с использованием метода слабой аппроксимации [1,2], который был впервые предложен в работах Н.Н. Яненко и А.А. Самарского и получил развитие в работах их учеников и последователей.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z) \mid 0 \le t \le T, (x,z) \in R^2\}$ рассматривается задача Коши для параболического уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{zz} + u_x + u_z + a(t)u + f(t,x,z)\lambda(t,x,z), \quad t \in (0,T), (x,z) \in R^2,$$

с начальным условием $u(0,x,z) = u_0(x,z)$.

Одновременно с функцией $u(t,x,z)$ определению подлежит функция $\lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)$.

Функции $a(t)$, $f(t,x,z), u_0(x,z)$ – вещественнозначные и заданы в $[0,T], G_{[0,T]}$ и R^2 соответственно. В полосе $G_{[0,T]}$ функция $u(t,x,z)$ удовлетворяет условиям переопределения

$$u(t,x,\alpha) = \varphi(t,x), \quad u(t,\beta,z) = \psi(t,z),$$

где α, β – некоторые постоянные.

Пусть выполнены условия согласования входных данных:

$$u_0(x,\alpha) = \varphi(0,x), \quad u_0(\beta,z) = \psi(0,z), \quad \varphi(t,\beta) = \psi(t,\alpha),$$

и условия на функцию источника $f(t,x,z)$:

$$|f(t,\beta,z)| \ge \delta_1 > 0, \quad |f(t,x,\alpha)| \ge \delta_2 > 0, \quad \forall t \in [0,T], \forall (x,z) \in R^2,$$

где δ_1, δ_2 – некоторые постоянные.

Также относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение, и удовлетворяют ему.

$$|a(t)| + \left|\frac{\partial^{l_1+k_1}}{\partial t^{l_1}\partial x^{k_1}}\varphi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{l_2+k_2}}{\partial t^{l_2}\partial z^{k_2}}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}u_0(x,z)\right| + \left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}f(t,x,z)\right| \le C,$$

$l_1, l_2 = 0,1,\ k_{1,}k_2 = 0,1,\ldots,6.$

Используя условия согласования, находим выражение на неизвестный коэффициент:

$$\lambda(t,x,z) = p(t,x,z) - \frac{u_{xx}(t,\beta,z) + u_x(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)} - \frac{u_{zz}(t,x,\alpha) + u_z(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)},$$

где

$$p(t,x,z)=\frac{\psi_t(t,z)-\psi_{zz}(t,z)-\psi_z(t,z)-a(t)\psi(t,z)}{f(t,\beta,z)}+\frac{\varphi_t(t,x)-\varphi_{xx}(t,x)-\varphi_x(t,x)-a(t)\varphi(t,x)}{f(t,x,\alpha)}-$$

$$-\frac{\psi_t(t,\alpha)-\varphi_{xx}(t,\beta)-\psi_{zz}(t,\alpha)-\varphi_x(t,\beta)-\psi_z(t,\alpha)-a(t)\psi(t,\alpha)}{f(t,\beta,\alpha)}-$$

известная функция, и приходим к вспомогательной прямой задаче для уравнения

$$u_t=u_{xx}+u_{zz}+u_x+u_z+a(t)u+$$

$$+f(t,x,z)\left[p(t,x,z)-\frac{u_{xx}(t,\beta,z)+u_x(t,\beta,z)}{f(t,\beta,z)}-\frac{u_{zz}(t,x,\alpha)+u_z(t,x,\alpha)}{f(t,x,\alpha)}\right],$$

$t\in(0,T),(x,z)\in R^2$, с начальным условием $u(0,x,z)=u_0(x,z)$.

Доказательство существования решения прямой задачи проводится методом слабой аппроксимации [1,2].

Для решения $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)+\lambda_2(t,z)$ обратной задачи доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть выполняются указанные выше условия на входные данные. Тогда существует решение $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)$ обратной задачи в классе

$$Z(T)=\left\{u(t,x,z),\lambda(t,x,z)\middle|u\in C^{1,4,4}_{t,x,z}(G_{[0,T]}),\lambda(t,x,z)\in C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,T]})\right\},$$

удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|+\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right|\le C.$$

Теорема 2. При выполнении условий на входные данные решение $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)$ обратной задачи, удовлетворяющее соотношению

$$\sum_{k_1,k_2=0}^{4}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}u(t,x,z)\right|+\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\left|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}\frac{\partial^{k_2}}{\partial z^{k_2}}\lambda(t,x,z)\right|\le C,$$

единственно в классе $Z(T)$.

Доказательство теорем 1 и 2 в целом повторяет доказательство теорем в работе [3].

Исследовано поведение решения при $t\to+\infty$. В области $G_{[0;+\infty)}$ справедливы теоремы.

Теорема 3. При выполнении в $G_{[0;+\infty)}$ указанных выше условий на входные данные и соотношений

$$a(t)\le -A,$$

где $A>18\cdot\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\sup_{t\in R^1}\sup_{(x,z)\in R^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\frac{f(t,x,z)}{f(t,\beta,z)}\right|+18\cdot\sum_{k_1,k_2=0}^{2}\sup_{t\in R^1}\sup_{(x,z)\in R^2}\left|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial z^{k_2}}\frac{f(t,x,z)}{f(t,x,\alpha)}\right|,$

и $\int_0^{+\infty}\left(|f(\theta,x,z)|+1\right)|p(\theta,x,z)|\,d\theta\le C,$

решение $u(t,x,z),\lambda(t,x,z)=\lambda_1(t,x)+\lambda_2(t,z)$ исходной обратной задачи в $G_{[0;+\infty)}$ удовлетворяет неравенству

$$|\lambda(t,x,z)|+|u(t,x,z)|\le C.$$

Теорема 4. Пусть в $G_{[0;+\infty)}$ выполнены условия на входные данные и имеют место соотношения

$$a(t)\le -A,$$

где $A > 18 \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{t\in R^1} \sup_{(x,z)\in R^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} \frac{f(t,x,z)}{f(t,\beta,z)} \right| + 18 \cdot \sum_{k_1,k_2=0}^{2} \sup_{t\in R^1} \sup_{(x,z)\in R^2} \left| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial z^{k_2}} \frac{f(t,x,z)}{f(t,x,\alpha)} \right|,$

и $|f(t,x,z)| \le \frac{M_1}{1+t^r}$, $|p(t,x,z)| \le \frac{M_2}{1+t^s}$,

где $M_1 > 0,\ M_2 > 0,\ r > 1,\ s > 1 -$ некоторые вещественные постоянные.

Тогда в $G_{[0;+\infty)}$ решение $u(t,x,z), \lambda(t,x,z) = \lambda_1(t,x) + \lambda_2(t,z)$ исходной обратной задачи удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t\to+\infty} \left(\sup_{(x,z)\in R^2} |u(t,x,z)| + |\lambda(t,x,z)| \right) = 0.$$

Список литературы:

1. Ю.Я. Белов, С.А. Кантор. *Метод слабой аппроксимации, Краснояр. гос. ун-т., 1999, 236 с.*
2. Н.Н. Яненко. *Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1967, 195 с.*
3. И.В. Фроленков, Е.Н. Кригер. *О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении,* Journal of Siberian Federal *University. Mathematics & Physics, 2010, 3(4), C. 556-564.*